

ECUACIONES DIFERENCIALES

(Grupo A)

Teoría Fundamental

En esta parte del curso nos dedicaremos a establecer los resultados teóricos fundamentales del curso. Nos interesaremos por las condiciones de existencia y de unicidad de la solución, la determinación del dominio de definición de la solución y por la dependencia continua de ésta con respecto a los datos. En la última sección estudiaremos la estabilidad de las soluciones.

El esquema del capítulo es el siguiente:

1. **EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES**
2. **SOLUCIONES MAXIMALES**
3. **DEPENDENCIA CONTINUA DE LOS DATOS**
4. **ESTABILIDAD**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Recordamos aquí algunos conceptos así como los resultados de existencia y unicidad (probablemente) introducidos en el curso anterior .

1.1. La condición de Lipschitz.

Definición 1.1. Sean I un intervalo de \mathbb{R} y \mathcal{O} un dominio de \mathbb{R}^n , una función $f(t, x) \in \mathcal{C}^0(I \times \mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$ es **lipschitziana** respecto a la variable x si existe una constante L tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todo } t \in I \text{ y todo } (x, y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}.$$

L se denomina constante de Lipschitz de la función f en $I \times \mathcal{O}$.

Diremos que f es **localmente lipschitziana** respecto a la variable x en $I \times \mathcal{O}$ si para cualquier intervalo compacto $J \subset I$ y para cualquier compacto $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$, f es lipschitziana en $J \times \mathcal{A}$. \square

Nota 1. Dado que en \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes, la lipschitzianidad de una función f no depende de la norma elegida. En todo lo que sigue podremos suponer que trabajamos con la norma euclídea, para $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2} \stackrel{\text{(notada)}}{=} \|z\|_2. \quad \square$$

Nota 2. Uno podrá comprobar fácilmente que si una función $f(t, x) \in \mathcal{C}^0(I \times \mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$ y es continuamente diferenciable en x_i para $i = 1, 2, \dots, n$ sobre $I \times \mathcal{O}$ entonces esta función es localmente lipschitziana sobre $I \times \mathcal{O}$. \square

1.2. Existencia global y unicidad.

Teorema 1.2. Sea f una función de $\mathcal{C}^0([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, lipschitziana con respecto a x en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, entonces, para cualquier $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ existe una única solución del problema de valor inicial

$$(1) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) & \text{para } t \in [a, b], \\ x(t_0) = x_0. & \square \end{cases}$$

Para la demostración de este teorema necesitaremos el teorema del punto fijo de Banach



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

para todo $x, y \in \mathcal{M}$. Entonces T admite un único punto fijo ξ y para todo $\xi_0 \in \mathcal{M}$ la sucesión $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $\xi_{n+1} = T(\xi_n)$, converge a ξ . Además,

$$d(\xi_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} d(\xi_1, \xi_0).$$

Demostración.

Consideremos el término $d(\xi_{i+1}, \xi_i)$, tenemos:

$$d(\xi_{i+1}, \xi_i) = d(T(\xi_i), T(\xi_{i-1})) \leq kd(\xi_i, \xi_{i-1})$$

por lo que deducimos:

$$(2) \quad d(\xi_{i+1}, \xi_i) \leq k^i d(\xi_1, \xi_0).$$

Por otra parte, suponiendo $n > m$, de la desigualdad triangular deducimos que

$$d(\xi_n, \xi_m) \leq d(\xi_n, \xi_{n-1}) + d(\xi_{n-1}, \xi_{n-2}) + \dots + d(\xi_{m+1}, \xi_m)$$

luego, aplicando (2) a cada uno de los términos de la parte derecha de la anterior desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned} d(\xi_n, \xi_m) &\leq k^{n-1} d(\xi_1, \xi_0) + k^{n-2} d(\xi_1, \xi_0) + \dots + k^m d(\xi_1, \xi_0) \\ &= (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(\xi_1, \xi_0) = \frac{k^m - k^n}{1-k} d(\xi_1, \xi_0) \end{aligned}$$

luego deducimos que, para $n > m$,

$$(3) \quad d(\xi_n, \xi_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(\xi_1, \xi_0)$$

por lo que $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy por lo que tiene un límite, que notaremos ξ en el espacio completo \mathcal{M} . Dado que $\xi_{n+1} = T(\xi_n)$, dejando tender n al infinito obtenemos $\xi = T(\xi)$, luego T tiene un punto fijo. Este es único, en efecto, supongamos que ξ y ζ son puntos fijos entonces

$$d(\xi, \zeta) = d(T(\xi), T(\zeta)) \leq kd(\xi, \zeta)$$

con $k < 1$ lo cual es imposible si $d(\xi, \zeta) \neq 0$, luego $\xi = \zeta$. La estimación del teorema se deduce de (3) cuando n tiende a infinito. **Q.E.D.**

Podemos deducir el siguiente resultado:

Corolario 1.4. Sea \mathcal{M} un espacio métrico completo, sea $T : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ una aplicación tal que para algún $m \in \mathbb{N}$ T^m sea contractiva. Entonces T admite un único punto fijo ξ

Demonstración: Aplicando el anterior teorema sabemos que T^m tiene un único punto

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración del teorema 1.2

Consideremos el espacio $C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$ dotado de la norma

$$(4) \quad \|\phi\| = \max_{t \in [a, b]} \|\phi(t)\|.$$

Se comprueba fácilmente que $C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach (i.e. es un espacio vectorial completo para la topología de la norma).

Sea la aplicación

$$\Phi : C^0([a, b]; \mathbb{R}^n) \mapsto C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$$

definida por

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

para todo $y \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$. Vamos a demostrar que Φ tiene un único punto fijo para lo cual demostraremos que para cierto entero m Φ^m es una contracción. Sean y y z dos funciones de $C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$, tenemos

$$(5) \quad \begin{aligned} \|\Phi(y(t)) - \Phi(z(t))\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|y(s) - z(s)\| ds \right| \end{aligned}$$

De (5) deducimos

$$(6) \quad \|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leq L|t - t_0| \|y - z\|$$

que es el caso $m = 1$ de la desigualdad más general:

$$(7) \quad \|\Phi^m(y)(t) - \Phi^m(z)(t)\| \leq \frac{L^m |t - t_0|^m}{m!} \|y - z\|.$$

Supongamos cierta esa desigualdad para m e intentemos deducirla para $m + 1$. Aplicando (5):

$$(8) \quad \begin{aligned} \|\Phi^{m+1}(y)(t) - \Phi^{m+1}(z)(t)\| &= \|\Phi(\Phi^m(y))(t) - \Phi(\Phi^m(z))(t)\| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|\Phi^m(y)(s) - \Phi^m(z)(s)\| ds \right| \end{aligned}$$

y aplicando (7)

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

por lo que (7) queda demostrado para todo entero $m \in \mathbb{N}$.

Más aún, dado que $|t - t_0| \leq b - a$ tenemos:

$$\|\Phi^m(y)(t) - \Phi^m(z)(t)\| \leq \frac{L^m(b-a)^m}{m!} \|y - z\| \quad \text{para todo } t \in [a, b],$$

luego, aplicando (4) tenemos

$$(10) \quad \|\Phi^m(y) - \Phi^m(z)\| \leq \frac{L^m(b-a)^m}{m!} \|y - z\|.$$

Como

$$\frac{L^m(b-a)^m}{m!} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty,$$

existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$ tengamos

$$\frac{L^m(b-a)^m}{m!} \leq \frac{1}{2},$$

luego

$$\|\Phi^{m_0}(y) - \Phi^{m_0}(z)\| \leq \frac{1}{2} \|y - z\|$$

para todo par $(y, z) \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$.

Al ser Φ^{m_0} una contracción el teorema de punto fijo de Picard permite deducir que Φ tiene un único punto fijo $x \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$, i.e. $x = \Phi(x)$ luego:

$$x(t) = \Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

y es solución del problema de valor inicial (1). Además la unicidad del punto fijo garantiza que x es la única solución de (1) dado que cualquier solución sería punto fijo de Φ .

Q.E.D.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99